ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସରଳ ସହସମୀକରଣ

(LINEAR SIMULTANEOUS EQUATIONS)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ରେ ସରଳ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ ହେଉଛି $ax + b = 0$, ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ । ଏଠାରେ a ଓ b ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ a କୁ x ର ସହଗ (coefficient) ଓ b କୁ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ (ମୂଳ) $-\frac{b}{a}$ ବୋଲି ଅମେ ଜାଣିଛେ । ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେ ଗୋଟିଏ ସରଳ ସମୀକରଣ (ଏକଘାତୀ)ର ସାଧାରଣ ରୂପ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(1)

ଯେଉଁଠାରେ a_1 ଓ b_1 ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗ ଓ c_1 ଧ୍ରୁବକ ରାଶି ଏବଂ a_1 b_1 ଓ c_1 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି । ଏଠାରେ a_1 ଓ b_1 ସହଗଦ୍ୱୟ ଏକ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

ସମୀକରଣ (1) ର ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପ xy ସମତଳ (ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଏହି ବିଷୟଟିର ଆଲୋଚନା ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀର ବୀଜଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ରେ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 5.3 ରେ କରାଯାଇଛି । x ଓ y ରେ ଏକାଘାତୀ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଓ ଏହାର ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟ ପାଇଁ ନିତାନ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ ।

x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ (1)ର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମକୁ ସମୀକରଣ (1) ବ୍ୟତୀତ ଆଉ ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ଯଥା –

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ....(2)

ଯେଉଁଠାରେ a_2 , b_2 ଓ c_2 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି । ଏଠାରେ x ଓ y ସହଗ ଓ a_2, b_2 ଦ୍ୱୟ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି । c_2 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି ।

ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ସହ ଜଡ଼ିତ କେତେକ ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନରେ ଉକ୍ତ ଏକଘାତୀ ସହ-ସମୀକରଣର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । କେତେକ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଶେଷ ଭାଗରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

1.2 ସହ-ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Geometrical Representation) :

ମନେକର ଦତ୍ତ ଏକ ଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ......(1)

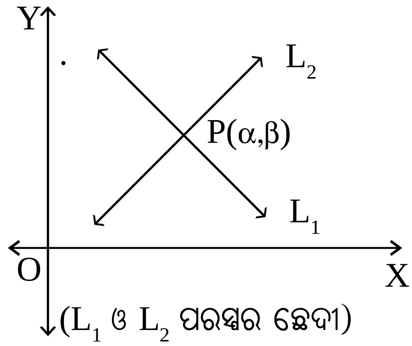
$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ......(2)

ଯେଉଁଠାରେ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ ଏବଂ $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ a_1, b_1 ଏବଂ a_2, b_2 ଏକ ସଙ୍ଗେ 0 ସହ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

ମନେକର ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ର ଲେଖଚିତ୍ର (ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ xy- ସମତଳ ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା) ଯଥାକ୍ରମେ L_1 ଓ L_2 ଭାବେ ନାମିତ । ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖିବା -

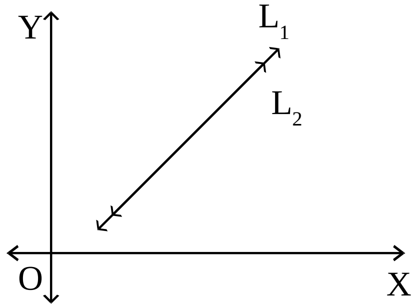
$L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଏବଂ $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ, ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ xy- ସମତଳରେ (ମନେକର ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ) ତିନି ପ୍ରକାରରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇ ପାରିବେ ଓ ଏହା ନିମ୍ନରେ ଚିତ୍ର 1.1 (i), (ii) ଏବଂ (iii) ରେ ଦର୍ଶିତ ।



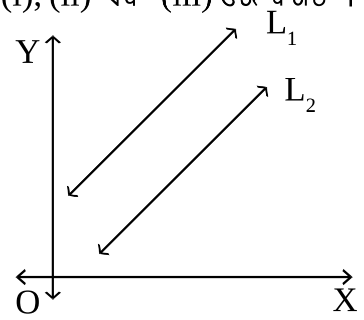
(L_1 ଓ L_2 ପରସ୍ପର ଛେଦୀ)

ଚିତ୍ର 1.1(i)



(L_1 ଓ L_2 ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ)

ଚିତ୍ର 1.1(ii)



(L_1 ଓ L_2 ସମାନ୍ତର)

ଚିତ୍ର 1.1(iii)

ଚିତ୍ର 1.1 (i) : L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ, ସେମାନଙ୍କର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଓ ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି ଉଭୟ L_1 ଓ L_2 ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହାର ସ୍ଥାନଙ୍କ (α,β) ଅର୍ଥାତ୍ $x = \alpha$ ଓ $y = \beta$ ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ସିଦ୍ଧ ହୁଅନ୍ତି ।

ବି.ଦ୍ର. : ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାଧାନ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ।

ଅତଏବ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ର କେବଳ **ଗୋଟିଏ (ଅନନ୍ୟ) ସମାଧାନ ରହିବ;** ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ହେବେ ।

ଚିତ୍ର 1.1(ii) : ଏଠାରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ (Coincident) ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଅସଂଖ୍ୟ । ଅତଏବ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।**

ଚିତ୍ର 1.1 (iii) : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର । ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ହେବେ ନାହିଁ ।

ସହ ସମାକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳ ରେଖା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ହେଲେ, **ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।**

1.3 ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ (Solution of simultaneous equations by use of Graphs) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଗୋଟିଏ ସରଳସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର କିପରି ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ସେ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି କରାଯାଏ ସେ ସମ୍ପର୍କରେ ଆମର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

$x + 2y - 3 = 0$ .... (i) $\qquad$ $2x - y - 1 = 0$ .... (ii)

ସମାଧାନ : ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟରୁ y କୁ x ରୂପରେ (ଅଥବା x କୁ y ରୂପରେ) ପ୍ରକାଶ କଲେ,

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(3-x)$ .... (i)

$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x - 1$ .... (ii)

ସମୀକରଣ (i) ରେ x ର ମାନ 3 ଓ 1 ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

x	3	1
y	0	1

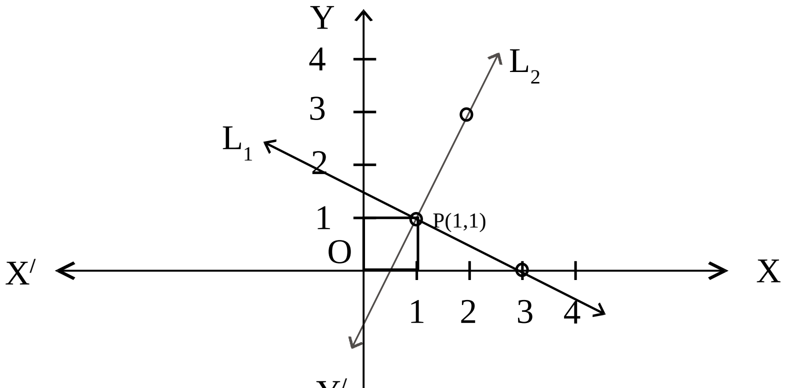
∴ P_1 ଓ P_2 ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (3,0) ଓ (1,1) ଅଟେ ।

ସେହିପରି ସମୀକରଣ (ii) ରେ x ର ମାନ 1 ଓ 2 ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

x	1	2
y	1	3

∴ Q_1 ଓ Q_2 ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (1,1) ଓ (2,3) ଅଟେ ।

ଲେଖ କାଗଜରେ x ଓ y ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି L_1 ରେଖାପାଇଁ $P_1(3,0)$ ଓ $P_2(1,1)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ



(ଚିତ୍ର 1.2)

ସ୍ଥାପନ କର ଏବଂ L_2 ରେଖା ପାଇଁ $Q_1(1, 1)$ ଓ $Q_2(2, 3)$ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର । ଏହାପରେ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ (L_1) ଓ $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ (L_2) ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଚିହ୍ନଟ କର, ଯାହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ଏବଂ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ହେବ । ∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନଟି (1, 1) ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମତଳରେ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ ଏକ ସରଳରେଖାର ଲେଖଚିତ୍ର ପାଇଁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଦୁଇଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଆବଶ୍ୟକ; କିନ୍ତୁ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ନେଇ ସରଳରେଖାର ଅନନ୍ୟତା ଦର୍ଶାଇବା ବିଧେୟ ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ଲେଖ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମାଧାନ କର : $x - 2y - 7 = 0;\ x + y + 2 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ରୁ y ର x ରୂପ

$x - 2y - 7 = 0;$ କିମ୍ବା $y = \frac{1}{2}(x - 7)$ .... (i)

ଏବଂ $x + y + 2 = 0$ କିମ୍ବା $y = -2 - x$ .... (ii)

(i) ରେ x ର ଦୁଇଗୋଟି ମାନ ପାଇଁ y ର ଆନୁସଙ୍ଗିକ ମାନ ସ୍ଥିର କରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

x	–1	3
y	–4	–2

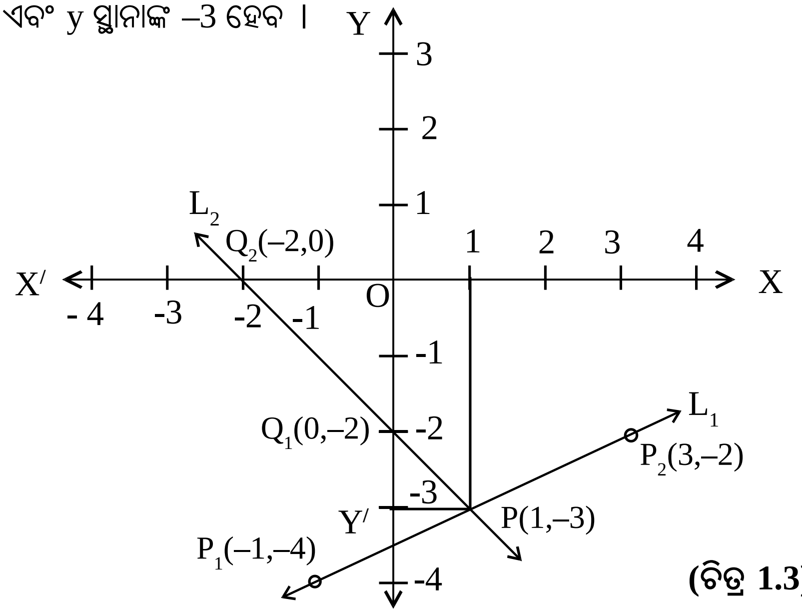
$P_1(-1, -4)$ ଏବଂ $P_2(3, -2)$

ସେହିପରି (ii) ପାଇଁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥିର କରିବା ।

x	0	–2
y	–2	0

$Q_1(0, -2)$ ଏବଂ $Q_2(-2, 0)$

ଲେଖ କାଗଜରେ x ଓ y ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି L_1 ରେଖାପାଇଁ $P_1(-1,4)$ ଓ $P_2(3,-2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର ଏବଂ L_2 ରେଖା ପାଇଁ $Q_1(0, -2)$ ଓ $Q_2(-2, 0)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ xy ସମତଳରେ ସ୍ଥାପନ କର । ଏହାପରେ $\overleftrightarrow{P_1P_2}(L_1)$ ଓ $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}(L_2)$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ଚିହ୍ନଟ କର, ଯାହାର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 1 ଏବଂ y ସ୍ଥାନାଙ୍କ –3 ହେବ ।



(ଚିତ୍ର 1.3)

L_1 ଓ L_2 ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁଟି P(1,–3) ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $x = 1, y = –3$ ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନନ୍ୟ (ଏକମାତ୍ର) ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(a) $x + y – 3 = 0$ ଓ $2x + 2y – 6 = 0$, (b) $x + y – 3 = 0$ ଓ $x + y – 5 = 0$

ସମାଧାନ : (a) ଏଠାରେ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ

$x + y – 3 = 0$.......... (i) ଓ $2x + 2y – 6 = 0$ ....(ii)

ସମୀକରଣ (ii) $\Rightarrow 2x + 2y – 6 = 0 \Rightarrow x + y – 3 = 0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି । ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ (0,3) ଓ (3,0) ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେଉଛନ୍ତି । ସୁତରାଂ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

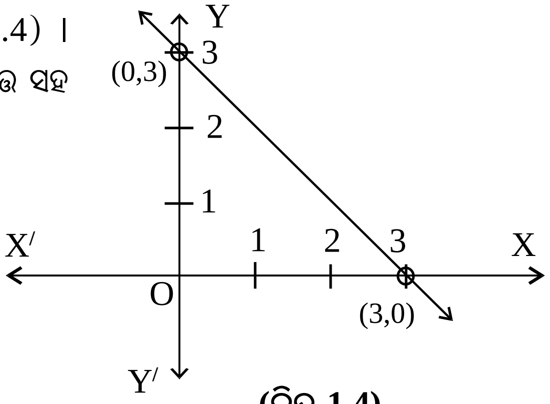
ଯେହେତୁ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 1.4) । ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଅସଂଖ୍ୟ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

(b) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $x + y – 3 = 0$

$\Rightarrow y = 3 – x$ .... (i)

$x + y – 5 = 0$

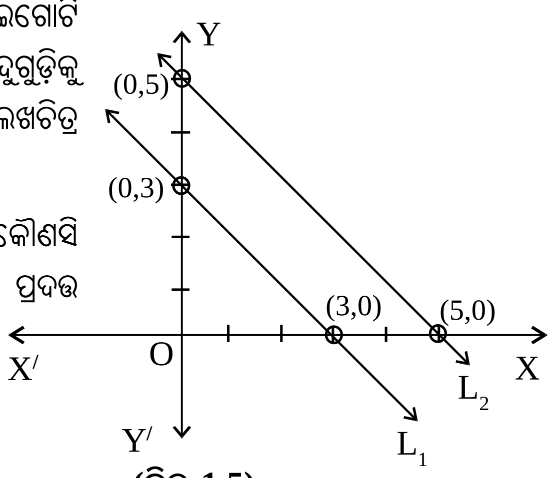
$\Rightarrow y = 5 – x$ .... (ii)



(ଚିତ୍ର 1.4)

ପ୍ରଥମ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇ ଗୋଟି ସମାଧାନ (0, 3) ଓ (3, 0) ଏବଂ ସେହିପରି ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣର ଦୁଇଗୋଟି ସମାଧାନ (0, 5) ଓ (5, 0) । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ନେଇ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସଂସ୍ଥାପନ କରି ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମେ ଲେଖଚିତ୍ର 1.5 ପାଇବା ।

ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ହେତୁ ସେମାନଙ୍କର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ (ଛେଦବିନ୍ଦୁ) ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ସୁତରାଂ (b) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ ।



(ଚିତ୍ର 1.5)

1.4 ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ

(Conditions of solvability of two linear simultaneous equations) :

ମନେକର ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣ ଦୁଇଟି $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଓ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଯେଉଁ ଠାରେ a_1, b_1 ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି ଓ a_2, b_2 ମଧ୍ୟ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ -1 ଏବଂ ଉଦାହରଣ - 2 ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ମିଳୁଅଛି ।

ଉଦାହରଣ -1 ରୁ ପାଇବା - $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -3$ ଏବଂ $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = -1$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \text{ ଓ } \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

ସେହିପରି ଉଦାହରଣ - 2 କ୍ଷେତ୍ରରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$ ଓ $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

ଉପରୋକ୍ତ ଅନୁଶୀଳନରୁ ପାଇଲେ, ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ସହଗ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ଓ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି y ର ସହଗ ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ଅସମାନ ହେଲେ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ଅନନ୍ୟ** ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ । କାରଣ ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ **ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର (Consistent and Independent)** ।

ଉଦାହରଣ 3(i) ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = -3$ ଏବଂ $a_2 = 2$, $b_2 = 2$, $c_2 = -6$

ଏଠାରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ ଓ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ଏବଂ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଉ ନଥିଲା ବେଳେ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ । କାରଣ ଲେଖଚିତ୍ରଦ୍ୱୟ **ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ** ଅଟନ୍ତି । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିଲେ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ **ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ (Consistent and Dependent)** ।

ଉଦାହରଣ 3(ii) ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -3$
$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = -5$

ଏଠାରେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$ ଏବଂ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ଏବଂ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର କୌଣସି ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଉନାହିଁ । କାରଣ **ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର** ଅଟନ୍ତି । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ସହ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ **ଅସଙ୍ଗତ (Inconsistent)** ।

ଉଦାହରଣ-1, ଉଦାହରଣ-2 ଓ ଉଦାହରଣ-3 ରୁ ପାଇଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ସନ୍ନିବେଶିତ ।

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2=0$ $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା	L_1 : $a_1x+b_1y+c_1=0$ L_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$	ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅନୁଯାୟୀ ସେମାନଙ୍କର ନାମକରଣ
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ	ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ ଅନନ୍ୟ (ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଏକମାତ୍ର ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାପତିତ ଅଥବା ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ	ସଙ୍ଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ (ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ)
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	L_1 ଓ L_2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର	ଅସଙ୍ଗତ (ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମୀକରଣ $a_1x+b_1y = 0$ ଓ $a_2x+b_2y = 0$ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନଟି (0,0); ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ଓ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ; ଯଦି $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବଦା ସଙ୍ଗତ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 4

(i) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ $4x + ky + 8 = 0$, $2x + 2y + 2 = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦୁଇଟିର ଅନନ୍ୟ ସମାଧନ ସମ୍ଭବ ?

(ii) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $kx + 3y – (k–3) = 0$ ଓ $12x + ky – k = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ?

(iii) k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ $5x–3y = 0$ ଓ $2x + ky = 0$ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ?

ସମାଧାନ (i) ଏଠାରେ $a_1 = 4, b_1 = k$ ଓ $c_1= 8$, $a_2 = 2, b_2 = 2$ ଓ $c_2 = 2$ ।

ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ : $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{k}{2} \Rightarrow k \neq 4$

$\therefore$ k = 4 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

(ii) ଏଠାରେ $a_1 = k, b_1 = 3, c_1= –(k–3), a_2 = 12, b_2 = k, c_2 = –k$

ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{-(k-3)}{-k}$$

ପ୍ରଥମ ସମାନତା ରୁ $k^2 = 12 \times 3 \Rightarrow k = \pm 6$ ....(1)

ଦ୍ୱିତୀୟ ସମାନତା ରୁ $–3k = –k(k–3) \Rightarrow k^2 – 6k = 0 \Rightarrow k (k– 6) = 0 \Rightarrow k =0$ କିମ୍ବା $k = 6$

(1) ଓ (2) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $k = 6$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $k = -6$ ହେଲେ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{2}$ ହେତୁ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବ ଓ $k \neq \pm 6$ ପାଇଁ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

(iii) ଏଠାରେ $a_1 = 5,\ b_1 = -3,\ a_2 = 2,\ b_2 = k$

ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବାର ସର୍ତ୍ତ : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{-3}{k}$

ଅର୍ଥାତ୍ $k = -\frac{6}{5}$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $x + y = 0$ ସମୀକରଣ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ----- [(4,5), (5,5), (–4, 4), (–4, 5)]

(ii) $x - 2y = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ----- [(4,2), (–4,2), (4, –2), (–4, –2)]

(iii) $2x + y + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ -----[(0,2), (2,0), (–2,0), (0, –2)]

(iv) $x - 4y + 1 = 0$ ହେଲେ x = ----- [4y – 1, 4y+1, –4y+1, –4y –1]

(v) $2x - y + 2 = 0$ ହେଲେ y = ----- [2x – 2, 2x+2, 2x – 2, –2x –2]

(vi) $x - 2y + 3 = 0$ ହେଲେ y = ----- [½(x+3), – ½(x –3), –½(–x+3), –½(x+3)]

2. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଯୋଡ଼ିରୁ କେଉଁ ସମୀକରଣ ଯୋଡ଼ି କ୍ଷେତ୍ରରେ (i) ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ (ii) ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ଏବଂ (iii) ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ?

(i) $x+y+1 = 0,\ x-y+1 = 0,$ (ii) $x+y+1 = 0,\ 2x+2y+2 = 0$

(iii) $x+y+1 = 0,\ x+y+3 = 0,$ (iv) $2x - y+3=0, - 4x+2y - 6=0$

(v) $2x - y + 3 = 0, 2x + y - 3 = 0,$ (vi) $2x - y + 3 = 0, -6x + 3y + 5 = 0$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଯେ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $x - y = 0$ (ii) $x + y = 0$

(iii) $x - 2y = 0$ (iv) $x + 2y - 4 = 0$

(v) $x - 2y - 4 = 0$ (vi) $2x - y + 4 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଆବଶ୍ୟକ ।

(i) $kx + my + 4 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଂଗତ ହେଲେ $k : m$ କେତେ ?

(ii) $2x + 3y - 5 = 0$ ଓ $7x - 6y - 1 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ $(1, \beta)$ ହେଲେ β ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(iii) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ (1,1), ସମୀକରଣ $3x + ty - 6 = 0$ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମାଧାନ ହେବ ?

(iv) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ (1,1), $tx - 2y - 10 = 0$ ର ଅନ୍ୟତମ ସମାଧାନ ହେବ ?

(v) 't' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $tx + 2y = 0$ ଓ $3x + ty = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ?

(vi) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $6x - 3y + 10 = 0$ ଓ $2x - y + 9 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ ।

(vii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x + 5y = 17$ ଏବଂ $5x + 3y = 14$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଂଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ।

(viii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $3x - 5y - 10 = 0$ ଏବଂ $6x - 10y = 20$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଛି ।

5. ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x + y - 4 = 0$ ଓ $x - y = 0$,

(ii) $x - y = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$

(iii) $x + y = 0$ ଓ $-x + y - 2 = 0$,

(iv) $2x + y - 3 = 0$ ଓ $x + y - 2 = 0$

(v) $3x + y + 2 = 0$ ଓ $2x + y + 1 = 0$,

(vi) $x + 2y + 3 = 0$ ଓ $2x + y + 3 = 0$

(vii) $2x + y - 6 = 0$ ଓ $2x - y + 2 = 0$,

(viii) $x + y - 1 = 0$ ଓ $2x + y - 8 = 0$

(ix) $3x + y - 11 = 0$ ଓ $x - y - 1 = 0$,

(x) $2x - 3y - 5 = 0$ ଓ $-4x + 6y - 3 = 0$

(xi) $2x + y + 2 = 0$ ଓ $4x - y - 8 = 0$,

(xii) $3x + 4y - 7 = 0$ ଓ $5x + 2y - 7 = 0$

6.(i) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x - 2y = 2$ ଏବଂ $4x - 4y - 8 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ ।

(ii) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2x - 3y = 1$ ଏବଂ $3x - 4y = 1$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

(iii) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $9x + 3y + 12 = 0$ ଏବଂ $18x + 6y + 24 = 0$ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଂଗତ ଓ ନିର୍ଭରଶୀଳ ।

(iv) ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ $2x - y = 1$ ଏବଂ $x + 2y = 8$ ସହସମୀକରଣଦୟର ସମାଧାନ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକର y- ଛେଦାଂଶ ନିରୂପଣ କର ।

7. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ **k** ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $x - 2y - 3 = 0, 3x + ky - 1 = 0$, (ii) $kx - y - 2 = 0, 6x + 2y - 3 = 0$

(iii) $kx + 3y + 8 = 0, 12x + 5y - 2 = 0$, (iv) $kx + 2y = 5, 3x + y = 1$

(v) $x - ky = 2, 3x + 2y + 5 = 0$, (vi) $4x - ky = 5, 2x - 3y = 12$

8. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ **k** ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $7x - y - 5 = 0, 21x - 3y - k = 0$, (ii) $8x + 2y - 9 = 0, kx + 10y - 18 = 0$

(iii) $kx - 2y + 6 = 0, 4x - 3y + 9 = 0$, (iv) $2x + 3y = 5, 6x + ky = 15$

(v) $5x + 2y = k, 10x + 4y = 3$, (vi) $kx - 2y - 6 = 0, 4x + 3y + 9 = 0$

9. k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅସଙ୍ଗତ ହେବେ ?

(i) $8x + 5y - 9 = 0, kx + 10y - 15 = 0$, (ii) $kx - 5y - 2 = 0, 6x + 2y - 7 = 0$

(iii) $kx + 2y - 3 = 0, 5x + 5y - 7 = 0$, (iv) $kx - y - 2 = 0, 6x - 2y - 3 = 0$

(v) $x + 2y - 5 = 0, 8x + ky - 10 = 0$, (vi) $3x - 4y + 7\ \ 0, kx + 3y - 5 = 0$

1.2. ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ବୀଜଗାଣିତିକ ସମାଧାନ :

ମନେକର ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad ....(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad ....(2)$$

ଏ ଦୁଇ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀ କିମ୍ବା ଲେଖଚିତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇ ପାରିବ। ପ୍ରଥମେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା କରିବା।

(i) ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପଦ୍ଧତି (Method of Substitution) : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) ରୁ ଯେକୌଣସିଟିକୁ ନେଇ ସେଥିରେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ କିମ୍ବା y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। ମନେକର ସମୀକରଣ (1) କୁ ବିଚାର କରାଯାଇ y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ସମୀକରଣ (1)ରେ ଯଦି $b_1 \neq 0$ ତେବେ $b_1y = -c_2 - a_1x \Rightarrow y = \frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ ....(3)

(3) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ y ର ମାନ $\frac{1}{b_1}(-c_1 - a_1x)$ କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ମିଳିବ ଓ ଏହା

$$a_2x + \frac{b_2}{b_1}\{-c_1 - a_1x\} + c_2 = 0 \Rightarrow (a_2b_1 - a_1b_2)x + (c_2b_1 - c_1b_2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(c_2b_1 - c_1b_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \Rightarrow x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad ....(4)$$

(4) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ x ର ମାନକୁ (1) କିମ୍ବା (2) ସମୀକରଣରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ ପାଇବା

$$a_1\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+b_1y+c_1=0 \Rightarrow y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad ....\ (5)$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \quad ....(6)$$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି $a_1 \neq 0$ ହୁଏ ତେବେ ଅନୁରୂପ ଭାବେ x କୁ y ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରି ଅଗ୍ରସର ହେଲେ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସମାଧାନ ମିଳିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 :

ସମାଧାନ କର : $5x + 2y + 2 = 0,\ 3x + 4y - 10 = 0$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$$5x + 2y + 2 = 0 \text{ ଓ } \quad ....(i)$$

$$3x + 4y - 10 = 0 \quad ....(ii)$$

ସମୀକରଣ (i)କୁ ବିଚାର କରି y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଉ।

$$\therefore 2y = -5x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-5x - 2) \quad ....(iii)$$

(ii) ଓ (iii)ରୁ $3x + \frac{4}{2}(-5x - 2) - 10 = 0 \Rightarrow 6x + 4(-5x - 2) - 20 = 0$

$$\Rightarrow 6x - 20x - 8 - 20 = 0 \Rightarrow -14x - 28 = 0 \Rightarrow x = -2$$

ସମୀକରଣ (i)ରେ $x = -2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା $5(-2) + 2y + 2 = 0$

$$\Rightarrow 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (–2, 4) ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟରେ $x = -2,\ y = 4$ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ (–2, 4) ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେଉଛନ୍ତି।

(II) ଅପସାରଣ ପଦ୍ଧତି (Method of Elimination) :

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ (1) ଓ (2)ରୁ x କୁ କିମ୍ବା y କୁ ଅପସାରଣ କରାଯାଇଥାଏ। ମନେକର ଆମେ x କୁ ଅପସାରଣ କରିବା। ସମୀକରଣ (1)ରେ xର ସହଗ a_1କୁ ସମୀକରଣ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନକଲେ ଏବଂ ସମୀକରଣ (2)ରେ xର ସହଗ a_2କୁ ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା

$$a_2 \times (1) \Rightarrow a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \quad ....(7)$$

$$a_1 \times (2) \Rightarrow a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \quad ....(8)$$

ସମୀକରଣ (7) ଓ (8)ରେ xର ସହଗ ସମାନ। (7) ରୁ (8)କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \;\Rightarrow\; y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ପରିଶେଷରେ yର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (1) [କିମ୍ବା ସମୀକରଣ (2)]ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ

$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଲବ୍ଧ ହେବ।

α ଓ β ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ହେଲେ, $\alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\beta = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ହେବ।

ଉଦାହରଣ - 6 :

ସମାଧାନ କର : $2x + 3y - 8 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ

$2x + 3y - 8 = 0$ ....(i)

$3x + y - 5 = 0$ ....(ii)

$3 \times$ (i) $\Rightarrow$ $6x + 9y - 24 = 0$ ....(iii)

$2 \times$ (ii) $\Rightarrow$ $6x + 2y - 10 = 0$ ....(iv)

$-\quad -\quad +$

(iii) – (iv) $\Rightarrow$ $7y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2$

ସମୀକରଣ (i) ରେ $y = 2$ ସ୍ଥାପନକଲେ ପାଇବା

$$2x + 6 - 8 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (1, 2). **(ଉତ୍ତର)**

(iii) ବଜ୍ର ଗୁଣନ (Cross Multiplication) :

ଆମର ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଦେଖିଛେ ଯେ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ....(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ....(2)

$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଅଟେ।

ସମାଧାନରୁ ଆମକୁ ମିଳିବ

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\\ \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\end{aligned}\right\} \quad ....(3)$$

ଉପରେ (3)ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି ସମାନତାର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମାନ ହେତୁ (3)କୁ

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad ....(4)$$

ରୂପରେ ଲେଖିହେବ । ଏଠାରେ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ଉଚିତ ଯେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ।

ସମୀକରଣ (4)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଉକ୍ତିକୁ ବଜ୍ରଗୁଣନ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ ସହଜରେ ମନେ ରଖିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଇଥାଏ ।

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & c_1 \\ b_2 & & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & a_1 \\ c_2 & & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & b_1 \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}}$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ x ଲବ ଥିବା ପଦର ହରରେ (b_1 ଗୁଣନ c_2) ଫେଡ଼ାଣ (c_1 ଗୁଣନ b_2) ହୁଏ । ସେହିପରି y ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ଓ 1 ଲବ ଥିବା ପଦର ହର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(1) $c_1 = c_2 = 0$ ଓ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ହେଲେ, $a_1x + b_1y = 0$, $a_2x + b_2y = 0$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନଟି (0, 0) ଅଟେ । ଏଠାରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ **ସମ ସହସମୀକରଣ (Homogeneous Simultaneous equation)** କୁହାଯାଏ । $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ହେଲେ, ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ଓ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

(2) ଦୁଇଗୋଟି ସହସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଇଥିଲେ ପ୍ରଥମେ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ସର୍ତ୍ତଟି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣ - 7 :

ସମାଧାନ କର : $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ, $2x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 9 = 0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର $2 \times 1 - 4(-3) = 2 + 12 = 14 \neq 0$ ତେଣୁ ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ ।

ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ,

$$\frac{x}{\begin{matrix} -3 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -1 \\ 1 & & -9 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -1 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & 2 \\ -9 & & 4 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 2 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & -3 \\ 4 & & 1 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-3)(-9) - 1(-1)} = \frac{y}{(-1)4 - (-9)2} = \frac{1}{2 \times 1 - 4(-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{27+1} = \frac{y}{-4+18} = \frac{1}{2+12} \Rightarrow \frac{x}{28} = \frac{y}{14} = \frac{1}{14} \Rightarrow x = \frac{28}{14} = 2, \quad y = \frac{14}{14} = 1$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1) । (ଉତ୍ତର)

1.4. ଅଣ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ସରଳରେଖିୟ ସହସମୀକରଣ $a_rx + b_ry + c_r = 0, r = 1, 2$ ....(1) ର ସମାଧାନ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିଛେ। ଅନେକ ସହ ସମୀକରଣ ଯାହାକି ଏକଘାତୀ ନୁହେଁ, ସେମାନଙ୍କୁ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏକଘାତୀ ରୂପକୁ ଅଣାଯାଇ ପାରିବ ଓ ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀର ଅବଲମ୍ବନରେ ସମାଧାନ କରିହେବ। ମାତ୍ର ଏପରି ଆମେ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ କରି ପାରିବା ନାହିଁ। କେତେଗୁଡ଼ିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏପରି କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଉଦାହରଣ - 8 :

ସମାଧାନ କର : $6x + 3y = 7xy,\ 3x + 9y = 11xy\ (x \neq 0,\ y \neq 0)$

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଦତ୍ତ ସହସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଏକଘାତୀ ନୁହଁନ୍ତି। କିନ୍ତୁ ଉଭୟ ସମୀକରଣର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ xy ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ($\because$ $x \neq 0$ ଓ $y \neq 0$ ତେବେ $xy \neq 0$)

$$\frac{6}{y}+\frac{3}{x} = 7,\quad \frac{3}{y}+\frac{9}{x} = 11$$

ଏଠାରେ $\frac{1}{x} = \upsilon$ ଓ $\frac{1}{y} = v$ ଲେଖିଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ

$$3\upsilon + 6v - 7 = 0 \text{ ଏବଂ } 9\upsilon + 3v - 11 = 0$$

(ଏଠାରେ $3x3 - 9 \text{ x } 6 = -45 \neq 0$)

ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା

$$\frac{\upsilon}{\begin{array}{cc}6 & -7\\ \times & \\ 3 & -11\end{array}} = \frac{v}{\begin{array}{cc}-7 & 3\\ \times & \\ -11 & 9\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc}3 & 6\\ \times & \\ 9 & 3\end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{-66+21} = \frac{v}{-63+33} = \frac{1}{9-54} \Rightarrow \frac{\upsilon}{-45} = \frac{v}{-30} = \frac{1}{-45}$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{-45}{-45} = 1 \text{ ଓ } v = \frac{-30}{-45} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \text{ ଓ } \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1 \text{ ଓ } y = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 :

ସମାଧାନ କର : $\frac{1}{2(2x+3y)} + \frac{12}{7(3x-2y)} = \frac{1}{2},\ \frac{7}{2x+3y} + \frac{4}{3x-2y} = 2$

ସମାଧାନ :

ମନେକର $\upsilon = \frac{1}{2x+3y}$ ଓ $v = \frac{1}{3x-2y}$ .... (i)

∴ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ $\frac{1}{2}\upsilon + \frac{12}{7}\nu = \frac{1}{2}$, $7\upsilon + 4\nu = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ $7\upsilon + 24\nu - 7 = 0$ (ii)

$7\upsilon + 4\nu - 2 = 0$ (iii)

(ii) – (iii) $\Rightarrow 20\nu - 5 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{4}$

∴ $3x - 2y = 4$ (iv)

(iii)ରେ $\nu = \frac{1}{4}$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $7\upsilon + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{7}$

∴ $2x + 3y = 7$ (v)

2(iv) – 3(v) $\Rightarrow 2(3x - 2y) - 3(2x + 3y) = 8 - 21$

$\Rightarrow -13y = -13 \Rightarrow y = 1$

(iv) ରେ $y = 1$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $3x - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$

∴ ଦତ୍ତ ସହ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (2, 1) ଅଟେ। (ଉତ୍ତର)

ବିଶେଷ ଆଲୋଚନା :

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରଟିକୁ ବିଚାର କର : $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

ଏହି ଚିତ୍ରରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଗୋଟି ଧାଡ଼ି (row) ଓ ଦୁଇଗୋଟି ସ୍ତମ୍ଭ (Column)ରେ ଲେଖାଯାଇଛି ଓ ସମସ୍ତ ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଟି ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ରଖାଯାଇଛି । ଏହାକୁ A ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଇଛି । ଏଠାରେ A କୁ ଏକ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Matrix) କୁହାଯାଏ । ଆମେ ମଧ୍ୟ 3 x 3, 4 x 4 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଲେଖିପାରିବା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର ବହୁଳ ଭାବେ କରାଯାଏ । ଯେହେତୁ ଏଠାରେ ଧାଡ଼ିସଂଖ୍ୟା ସହ ସ୍ତମ୍ଭସଂଖ୍ୟା ସମାନ, ତେଣୁ ଏହି ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକୁ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Square matrix) କୁହାଯାଏ । କେବଳ 2 x 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏଠାରେ ବିଚାର କରାଯାଉଛି । ପ୍ରତି ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ସଂପୃକ୍ତ ଓ ଏହାକୁ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ (determinant) କୁହାଯାଏ । ଯଦି ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ହୁଏ ତେବେ ଏହାର ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ହେଲେ

$|A| = 5 \times 1 - 7 \times 2 = 5 - 14 = -9$ ଅଟେ ।

ସେହିପରି, $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 0 \times (-4) = 3 - 0 = 3;$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 6 + 1 = 7$

ଆମେ ଦେଖିଛେ ଯେ, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow a_1x + b_1y = -c_1$ ଏବଂ

$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow a_2x + b_2y = -c_2$

$a_1, b_1, -c_1,\ a_2, b_2, -c_2$ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ତିନିଗୋଟି ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ ବିଚାର କର :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ଏବଂ } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

[Δର ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଧ୍ରୁବକ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ବଦଳାଇଲେ] [Δର ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଧ୍ରୁବକ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ବଦଳାଇଲେ]

ଯେଉଁଠାରେ $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = -c_1b_2 - b_1(-c_2) = b_1c_2 - b_2c_1$, $\Delta_y = -a_1c_2 - a_2(-c_1) = c_1a_2 - c_2a_1$

ଅତଏବ ଡିଟର୍‌ମିନାଣ୍ଟ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ :

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ ଯେଉଁଠାରେ $\Delta \neq 0$ କାରଣ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ସଙ୍ଗତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ଲବ୍ଧ ସମାଧାନକୁ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖିଲେ,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{b}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{b}{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\Delta_x} = \frac{y}{\Delta_y} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

ଏହାକୁ ସୁପରିଚିତ Cramer's ନିୟମ କୁହାଯାଏ । ବଜ୍ରଗୁଣନ ସୂତ୍ର ହିଁ Cramer's Rule ର ଅନ୍ୟରୂପ ।

ଉଦାହରଣ - 10 :

Cramer ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

$x + 2y = -1$ ଓ $2x - 3y = 12$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - 2 \times 2 = -3 - 4 = -7 \quad \therefore \Delta \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 12 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-3) - 2 \times 12 = 3 - 24 = -21$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 1 \times 12 - 2 \times (-1) = 12 + 2 = 14$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-21}{-7} = 3,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : $(x, y) = (3, -2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. ପ୍ରତିକଳ୍ପନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x + y - 8 = 0,\ 2x - 3y - 1 = 0$
(ii) $3x + 2y - 5 = 0,\ x - 3y - 9 = 0$
(iii) $2x - 5y + 8 = 0,\ x - 4y + 7 = 0$
(iv) $11x + 15y + 23 = 0,\ 7x - 2y - 20 = 0$
(v) $ax + by - a + b = 0,\ bx - ay - a - b = 0$
(vi) $x + y - a = 0,\ ax + by - b^2 = 0$

2. ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହ ସମୀକରଣ ମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x - y - 3 = 0,\ 3x - 2y - 10 = 0$
(ii) $3x + 4y = 10,\ 2x - 2y = 2$
(iii) $3x - 5y - 4 = 0,\ 9x = 2y - 1$
(iv) $0.4x - 1.5y = 6.5,\ 0.3x + 0.2y = 0.9$
(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0,\ \sqrt{5}x + \sqrt{2}y = 0$
(vi) $ax + by = 0,\ x + y - c = 0\ (a+b \neq 0)$

3. ବଜ୍ରଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର ।

(i) $x + 2y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 12 = 0$
(ii) $2x + 5y = 1,\ 2x + 3y = 3$
(iii) $x + 6y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 8 = 0$
(iv) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b,\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$
(v) $x + 6y + 1 = 0,\ 2x + 3y + 8 = 0$
(vi) $4x - 9y = 0,\ 3x + 2y - 35 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କର ।

(i) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 17,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$
(ii) $\frac{5}{x} + 6y = 13,\ \frac{3}{x} + 20y = 35$ $(x \neq 0)$
(iii) $2x - \frac{3}{y} = 9,\ 3x + \frac{7}{y} = 2$ $(y \neq 0)$
(iv) $4x + 6y = 3xy,\ 8x + 9y = 5xy$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$
(v) $(a-b)\,x + (a+b)\,y = a^2 - 2ab - b^2$, $(a+b)\,x + (a+b)y = a^2 + b^2$
(vi) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2,\ ax - by = a^2 - b^2$

(vii) $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} + 1 = 0$ (viii) $\frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5}, \frac{xy}{y-x} = 6$

$\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} - 10 = 0$ $(x + y \neq 0, x - y \neq 0)$

(ix) $6x + 5y = 7x + 3y + 1 = 2(x + 6y - 1)$

(x) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x+y-12}{11}$

(xi) $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8, \quad \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11$ (xii) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $ax + by = a^2 + b^2$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଡିଟରମିନାଣ୍ଟର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$

6. Cramer ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସହସମୀକରଣମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କର :

(i) $2x + 3y = 5, \ 3x + y = 4$ (ii) $x + y = 3, \ 2x + 3y = 8$

(iii) $x - y = 0, \ 2x + y = 3$ (iv) $2x - y = 3, \ x - 3y = -1$

1.7 ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ପ୍ରୟୋଗ

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଅନେକ ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ ସହଜରେ କରିଛେ । ସେହିପରି ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗରେ ଜଟିଳ ପାଟିଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସହଜ ସମାଧାନ କିପରି କରିପାରିବା, ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏଥିପାଇଁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 11 : ପିତାଙ୍କ ବୟସର ଦୁଇଗୁଣ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ସମଷ୍ଟି 105 ବର୍ଷ । ମାତ୍ର ପିତାଙ୍କ ବୟସ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସର ଦୁଇଗୁଣର ସମଷ୍ଟି 75 ବର୍ଷ । ତେବେ ପିତା ଓ ପୁତ୍ରଙ୍କ ବୟସ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପିତାଙ୍କ ବୟସ = x ବର୍ଷ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = y

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $2x + y = 105$ ଓ $x + 2y = 75$

$\therefore$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ $2x + y - 105 = 0$ ଓ $x + 2y - 75 = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $\frac{x}{1 \times (-75) - 2 \times (-105)} = \frac{y}{-105 \times 1 - (-75) \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 - 1 \times 1}$

$\Rightarrow \frac{x}{135} = \frac{y}{45} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{135}{3} = 45$ ଓ $y = \frac{45}{3} = 15$

$\therefore$ ପିତାଙ୍କ ବୟସ = 45 ବର୍ଷ ଓ ପୁତ୍ରର ବୟସ = 15 ବର୍ଷ ।

ଉଦାହରଣ - 12 : ଦୁଇଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 12 । ସଂଖ୍ୟାଟିର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ ତାହା ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା ଠାରୁ 18 ଅଧିକ । ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟିର ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ = x ଓ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ = y

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି = 10x + y ଓ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାଟି = 10y+x

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $x + y = 12$ ....(i) ଏବଂ

$(10y+x) - (10x + y) = 18 \Rightarrow 9y - 9x - 18 \Rightarrow y - x = 2$ ..... (ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗ କଲେ ପାଇବା $2y = 14 \Rightarrow y = 7$

y ର ମୂଲ୍ୟ ସମୀକରଣ (i) ରେ ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା $x + 7 = 12 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି = 57 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବ ଓ ହର ଉଭୟ ରେ 1 ଯୋଗକଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{4}{5}$ ହୁଏ । ଯଦି ଲବ ଓ ହର ଉଭୟରୁ 5 ବିୟୋଗ କଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{1}{2}$ ହୁଏ, ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି କେତେ ?

ସାମାଧାନ : ମନେକର ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{x}{y}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$ ଏବଂ $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 5x + 5 = 4y + 4$ ଏବଂ $2x - 10 = y - 5$

$\Rightarrow 5x - 4y + 1 = 0$ .... (i) ଓ $2x - y - 5 = 0$ .... (ii)

ସମୀକରଣ (i) $\Rightarrow 5x - 4y + 1 = 0$ .... (iii)

ସମୀକରଣ (ii) x 4 $\Rightarrow 8x - 4y - 20 = 0$ .... (iv)

ସମୀକରଣ (iii) ରୁ ସମୀକରଣ (iv) ବିୟୋଗ କଲେ, $-3x + 21 = 0 \Rightarrow x = 7$

x ର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (i) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ $5 \times 7 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow 4y = 36 \Rightarrow y = 9$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭଗ୍ନାଂଶଟି = $\frac{7}{9}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : 8 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 10 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । 6 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 8 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଉକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 14 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରିଲେ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ଜଣେ ପୁରୁଷ x ଦିନରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ y ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବେ ।

ତେବେ ଜଣେ ପୁରୁଷ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{x}$ ଅଂଶ କରିପାରେ ଓ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ $\frac{1}{y}$ ଅଂଶ କରିପାରେ । ମାତ୍ର 8 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 12 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{10}$ ଅଂଶ ଏବଂ ଜଣେ ପୁରୁଷ ଓ 6 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀଲୋକ ଗୋଟିଏ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟର $\frac{1}{14}$ ଅଂଶ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{8}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{10}$, $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{1}{14}$

$\frac{1}{x} = \upsilon$ ଓ $\frac{1}{y} = \nu$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ ପାଇବା–

$$80\upsilon + 120\nu - 1 = 0 \text{ ଏବଂ } 84\upsilon + 112\nu - 1 = 0$$

ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ ପାଇଁ ବଜ୍ରଗୁଣନ ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କଲେ

$$\frac{\upsilon}{120(-1)-112(-1)}=\frac{\nu}{84(-1)-80(-1)}=\frac{1}{80\times112-120\times84}$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon}{-8}=\frac{\nu}{-4}=\frac{1}{-1120} \Rightarrow \upsilon=\frac{8}{1120}=\frac{1}{140} \text{ ଓ } \nu=\frac{4}{1120}=\frac{1}{280}$$

$\Rightarrow x = 140$ ଓ $y = 280$

$\therefore$ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ 280 ଦିନରେ ସମାପ୍ତ କରିପାରିବ।   (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ x ଓ y । $\therefore$ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍‌କ୍ରମ $\frac{1}{x}$ ଓ $\frac{1}{y}$ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $x + y = 15$............ (i)   ଏବଂ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{10}$ .... (ii)

$\Rightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{xy}=\frac{3}{10}$ ((i) ର ବ୍ୟବହାର ହେତୁ)

$\Rightarrow xy = \frac{15x10}{3} = 50$

କିନ୍ତୁ $x - y = \pm\sqrt{(x+y)^2-4xy} = \pm\sqrt{15^2-4x50} = \pm\sqrt{25} = \pm5$

$\therefore x - y = 5$ .... (iii)   କିମ୍ବା $x - y = -5$ .... (iv)

(i) ଓ (iii) କୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $x = 10, y = 5$

କିମ୍ବା (i) ଓ (iv) କୁ ସମାଧାନ କଲେ $x = 5$ ଓ $y = 10$

ସୁତରାଂ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ 10 ଓ 5 ।   (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (c)

1. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 137 ଓ ସେମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ ଫଳ 43 । ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିରୁପଣ କର ।

2. ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x + 4 ସେ.ମି., 4x-y ସେ.ମି. ଓ y+2 ସେ.ମି. ହେଲେ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

3. ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର AB = 3x + y ସେ.ମି., BC = 3x + 2 ସେ.ମି., CD = 3y– 2x ସେ.ମି. ଓ DA = y + 3 ସେ.ମି. ହେଲେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିରୁପଣ କର ।

4. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଯୋଗ ଫଳର 4 ଗୁଣ । କିନ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 18 ଯୋଗ କଲେ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳି ଯାଏ । ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

5. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ତାହାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ, ସେ ଦୁହିଁଙ୍କର ଯୋଗଫଳ 99 ଓ . ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 3 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

6. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, ସେମାନଙ୍କ ବିୟୋଗଫଳର 4 ଗୁଣ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟିର ଯୋଗଫଳ 8 । ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି କେତେ ?

7. ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି 10; କିନ୍ତୁ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇ ଲେଖିଲେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣରୁ 1 ଊଣା ହୁଏ, ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

8. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟିର 3 ଗୁଣରୁ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର 2 ଗୁଣ ବିୟୋଗ କଲେ ବିୟୋଗଫଳ 2 ହେବ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟଟିରେ 7 ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ପ୍ରଥମଟିର 2 ଗୁଣ ହେବ । ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର ।

9. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବ ଓ ହର ରେ 2 ଯୋଗ କଲେ ତାହା $\frac{9}{11}$ ହୁଏ । ମାତ୍ର ଲବ ଓ ହରରେ 3 ଯୋଗ କଲେ ତାହା $\frac{5}{6}$ ହୁଏ । ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି କେତେ ?

10. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନାଂଶର ଲବର 3 ଗୁଣ ଓ ହରରୁ 3 ବିୟୋଗ କଲେ ଭଗ୍ନାଂଶଟି $\frac{18}{11}$ ହୁଏ । ମାତ୍ର ଲବରେ 8 ଯୋଗ କଲେ ଓ ହରକୁ 2 ଗୁଣ କଲେ ତାହା $\frac{2}{5}$ ହୁଏ । ତେବେ ଭଗ୍ନାଂଶ କେତେ ?

11. 5 ଟି କଲମ ଓ 6 ଟି ପେନ୍‌ସିଲର ଦାମ ମିଶି 9 ଟଙ୍କା ଏବଂ 3 ଟି କଲମ ଓ 2 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ର ଦାମ ମିଶି 5 ଟଙ୍କା ହୁଏ । ତେବେ ଗୋଟିଏ କଲମ ଓ ଗୋଟିଏ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ର ଦାମ କେତେ ?

12. ପିତାଙ୍କ ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର 3 ଗୁଣ । 12 ବର୍ଷ ପରେ ପିତାଙ୍କ ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର 2 ଗୁଣ ହେବ । ତେବେ ପିତା ଓ ପୁତ୍ରର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ କେତେ ?

13. ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 5 ସେ.ମି. କମାଇ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 3 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 9 ବର୍ଗ ସେ.ମି. କମିଯାଏ । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 3 ସେ.ମି. ଓ ପ୍ରସ୍ଥକୁ 2 ସେ.ମି. ବଢ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 67 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ବଢ଼ିଯାଏ । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

14. 2 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 3 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 5 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ 4 ଜଣ ପୁରୁଷ ଓ 9 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏକତ୍ର 2 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରନ୍ତି । ତେବେ ଜଣେ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ କିମ୍ବା ଜଣେ ପୁରୁଷ ସେହି କାର୍ଯ୍ୟକୁ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବ ?

15. A ଓ B ଏକତ୍ର କାମ କରି ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 8 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରନ୍ତି । ସେମାନେ ଏକତ୍ର କାର୍ଯ୍ୟ ଆରମ୍ଭ କରି 3 ଦିନ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପରେ A ଚାଲିଗଲା ଓ ଅବଶିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ଆଉ 15 ଦିନରେ ଶେଷ କଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକାକୀ କାମ କଲେ କେତେ ଦିନରେ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ଶେଷ କରି ପାରିବେ ।

16. A ଓ B ର ଆୟର ଅନୁପାତ 8:7 ଓ ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 19:16 । ଯଦି ଉଭୟେ 1250 ଟଙ୍କା ସଂଚୟ କରିପାରନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଆୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. 5 ବର୍ଷ ପରେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ରର ବୟସର ତିନିଗୁଣ ହେବ ଓ 5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ପିତାର ବୟସ ପୁତ୍ର ବୟସର ସାତଗୁଣ ଥିଲା । ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ ସ୍ଥିର କର ।

18. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମି. ଅଧିକ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. କମ୍ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 28 ବ.ମି. କମିଯାଏ; ମାତ୍ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 1 ମି. କମ୍ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ 2 ମି. ଅଧିକ ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 33 ବ.ମି. ବଢ଼ିଯାଏ । ମୂଳ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

19. 50 କୁ ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ଯେପରିକି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{1}{12}$ ହେବ ।

20. ଗୋଟିଏ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାର ଲବ ଓ ହରକୁ ଯୋଗ କରି ଯୋଗଫଳର ଏକ-ତୃତୀୟାଂଶ ନେଲେ, ତାହା ହରଠାରୁ 4 ଊଣା ହୁଏ ଓ ହରରେ 1 ଯୋଗ କରି ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ତାହା $\frac{1}{4}$ ହୁଏ । ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି କେତେ ?

■■■

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

(QUADRATIC EQUATIONS)

2.1 ଉପକ୍ରମ (Introduction) :

$P(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ ଗୋଟିଏ **ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Quadratic Polynomial),** ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2, x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବ ସଂଖ୍ୟା ।

$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ କୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic Equation)** କୁହାଯାଏ ।

ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax + b = 0,\ (a \neq 0)$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ଏବଂ ଏହାର ସମାଧାନ ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଥାଏ ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ବୀଜ ଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ସମୀକରଣ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0)$ ର n ସଂଖ୍ୟକ ବୀଜ ବା ମୂଳ ଅଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଟି "ବୀଜଗଣିତରେ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ' **(Fundamental Theorem of Algebra)** ରୂପେ ପରିଚିତ ।

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚିତ $ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସଂପର୍କିତ ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ମନେକର ସମୀକରଣଟି $x^2 - 5x + 6 = 0$ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ପାଇବା,

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ କିମ୍ବା } x = 3$$

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ 2 ଓ 3 ।

ଯଦି $x = \alpha$ ପାଇଁ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c$ ର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ, ତେବେ α କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ (zero) କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 3, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ, କାରଣ $x = 3$ ପାଇଁ

x^2-5x+6 ର ମାନ 0 ଅଟେ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ, **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର 'ଶୂନ' ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ଏକ ମୂଳ (root) ଅଟେ ।** ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ 'ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ' ଅବଲମ୍ବନରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିପରି ହୁଏ, ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: ax^2+bx+c ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ।

2.2. ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution by Completing the squares):

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ 'a' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$ ($\frac{c}{a}$ ଧ୍ରୁବକର ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା ।)

$\Rightarrow x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ଯୋଗ କରାଗଲା ।)

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right)^2$$

(ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଯାଇଛି ।)

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$\Rightarrow x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ କିମ୍ବା, $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ତେଣୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$; $\beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$

$\Rightarrow ax^2 + bx = -c$ ('c' କୁ ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 4a(ax^2 + bx) = -4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 4a ଗୁଣନ କଲେ)

$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2.\ 2ax.\ b = -4ac$

$\Rightarrow (2ax)^2 + 2.\ 2ax.\ b + b^2 = b^2 - 4ac$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ b^2 ଯୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow (2ax + b)^2 = \left(\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}\right)^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)} \Rightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ କିମ୍ବା $x = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

ଅତଏବ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ α ଓ β ହେଲେ :

$\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ ଏବଂ $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ .... (i)

(i) ରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସୂତ୍ରକୁ **ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର (Quadratic Formula)** କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପ୍ରଥମ କରି ଦଶମ ଶତାବ୍ଦିରେ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀଧର ଆଚାର୍ଯ୍ୟଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ପାଦିତ ହୋଇଥିଲା ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି $6x^2 + 11x + 3 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 6$, $b = 11$ ଓ $c = 3$

4a ଅର୍ଥାତ୍ 24 ଦ୍ୱାରା $6x^2 + 11x = -3$ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$24 (6x^2 + 11x) = (-3) \times 24$

$\Rightarrow 144 x^2 + 264x = -72 \Rightarrow (12x)^2 + 2 (12x) \times 11 = -72$

$\Rightarrow (12x)^2 + 2 (12x) \times 11 + (11)^2 = (-72) + (11)^2$

$\Rightarrow (12x + 11)^2 = -72 + 121 = 49 = (\pm 7)^2$

$\Rightarrow 12x + 11 = \pm 7 \Rightarrow 12x = -11 \pm 7$

$\Rightarrow 12x = -11 + 7$ କିମ୍ବା $-11 - 7$

$\Rightarrow 12x = -4$ କିମ୍ବା -18

$\Rightarrow x = \dfrac{-4}{12} = -\dfrac{1}{3}$ କିମ୍ବା $\dfrac{-18}{12} = \dfrac{-3}{2}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $-\dfrac{1}{3}$ ଓ $\dfrac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $6x^2 + 11x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{11}{6}x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6 ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କରାଗଲା)

$$\Rightarrow x^2 + 2.x.\ \frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{x^2 + 2.x.\ \frac{11}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2\right\} = \frac{121}{144} - \frac{1}{2} = \frac{49}{144}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{11}{12}\right)^2 = \left(\pm\frac{7}{12}\right)^2 \Rightarrow x + \frac{11}{12} = \pm\frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{12} \pm \frac{7}{12} \Rightarrow x = \frac{-11}{12} + \frac{7}{12} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-11}{12} - \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-18}{12} = \frac{-3}{2}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\frac{-1}{3}$ ଓ $\frac{-3}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି $x^2 + 2x - 63 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = 2$ ଓ $c = -63$

ଅତଏବ $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{(2^2 - 4 \times 1 \times (-63)}}{2 \times 1} = \dfrac{-2 + \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \dfrac{-2 + 16}{2} = 7$

ଓ $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{\{2^2 - 4 \times 1 \times (-63)\}}}{2 \times 1} = \dfrac{-2 - \sqrt{(4 + 252)}}{2} = \dfrac{-2 - 16}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9$

ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବୀଜ ଦ୍ୱୟ $\alpha = 7$ ଓ $\beta = -9$ । (ଉତ୍ତର)

2.3. ପ୍ରଭେଦକ (Discriminant) :

$b^2 - 4ac$ କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ 'D' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $D = b^2 - 4ac$ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ କୁ ବିଚାରକୁ ନେଲାବେଳେ, ସେଥିରେ a, b ଓ c ରାଶିତ୍ରୟ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 0$ ।

ମୂଳ ଦ୍ୱୟକୁ D ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

ଏବଂ $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ।

2.4 ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ (Nature of roots) :

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ (D) କୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

(i) $D > 0$ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha \neq \beta$ ।

(ii) $D = 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $\alpha = \beta$ ।

(iii) $D < 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ ।

ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ପ୍ରଭେଦକ $D \geq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ କିମ୍ବା ଅଭିନ୍ନ ହେବେ ।

ବି.ଦ୍ର. : (i) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

(ii) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନ ହେଲେ, ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ,

D ର ମାନ	ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ	ବୀଜଦ୍ୱୟ
1. $D > 0$	ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଅସମାନ	$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
(i) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା	ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ	ମୂଳଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ	
2. $D = 0$	ବାସ୍ତବ (ପରିମେୟ) ଏବଂ ସମାନ	$\frac{-b}{2a}$
3. $D < 0$	ଅବାସ୍ତବ ଅର୍ଥାତ୍ ବାସ୍ତବ ମୂଳ ନାହିଁ	

ଉଦାହରଣ - 3 : $x^2 - 2x - 8 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1, b = -2$ ଓ $c = -8$

$\therefore$ ପ୍ରଭେଦକ $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$

ଯେହେତୁ $D > 0$, ମୂଳଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପର ପୃଥକ ଅଟନ୍ତି । (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 36 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବେ ।

2.5 ମୂଳଦ୍ୱୟ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ (Relation between roots and coefficients) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଓ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β । ଅତଏବ

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \text{ ଏବଂ } \beta = \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

(a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ)

(I) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି :

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}}$$ ।

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି} = \frac{-b}{a}}$

(II) ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ : $\alpha\beta = \left[\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]\left[\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}\right]$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{(b^2-4ac)}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = \frac{\text{ଧ୍ରୁବକ ରାଶି}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}}$$ ।

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ} = \frac{c}{a}}$

ଉଦାହରଣ - 4 :

ଯଦି $25x^2 + 30x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ $\alpha + \beta$ ଓ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 25$, $b = 30$ ଓ $c = 7$ ।

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{7}{25}$ (ଉତ୍ତର)

2.6 କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ଫଳାଫଳ (Some known results) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ ଏବଂ ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(I) $\alpha - \beta = \pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \pm\sqrt{\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}} = \pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a}$

(II) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$

(III) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{a} = \frac{-b\sqrt{(b^2-4ac)}}{a^2}$$

(IV) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{-b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

(V) $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{ca}$$

ଉଦାହରଣ - 5 : ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ,

ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 13$ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣରେ, $a = 2, b = -6, c = 3$ ।

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3 x 2}{3} = 2$ ଏବଂ $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(3)^2 - 2 x\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{(9-3) x 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 4 + (3 x 2) + 2 x \left(\frac{3}{2}\right)$

$= 4 + 6 + 3 = 13 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

2.7 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଗଠନ (Formation of a quadratic equation) :

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ତେବେ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ଏବଂ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.5)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (a ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ ଆବଶ୍ୟକ **ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ : x^2–(ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି)x+ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = 0** ।

ସୂଚନା : ମୂଳଦ୍ୱୟ ଜଣାଥିଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି - 5 ଓ ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର α ଓ β ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ।

ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -5$ ଓ $\alpha\beta = 3$ (ଦତ୍ତ)

ଆବଶ୍ୟକ ସମୀକରଣ : $x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-5)x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : $ax^2 - 4x + (4a + 1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 2 ହେଲେ a ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ।

ଏଠାରେ $\alpha\beta = \frac{4a+1}{a} = 2 \Rightarrow 4a + 1 = 2a \Rightarrow 4a - 2a = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ଯଦି $ax^2 + 4x + 6a = 0,\ a \neq 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ, a ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -\frac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = -\frac{4}{a}$, $\alpha\beta = \frac{x \text{ ବିହୀନ ପଦ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = \frac{6a}{a} = 6$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\alpha + \beta = \alpha\beta \Rightarrow -\frac{4}{a} = 6 \Rightarrow a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ତ୍ରୁଟିକୁ ସଂଶୋଧନ କରି ଲେଖ ।

(i) $x^2 - 4x + 4 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଭିନ୍ନ ।

(ii) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ 2 ଅଟେ ।

(iii) $ax^2 + bx - c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{c}{a}$ ।

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{b}{a}$ ।

(v) 1 ଓ –1 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $x^2 + 1 = 0$ ।

(vi) $x^2 = 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି ।

(vii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $-\frac{3}{2}$ ।

(viii) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $\frac{1}{3}$ ।

2 . ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 ଓ –5 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $mx^2 - 2x + (2m-1) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, m ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) $x^2 - px + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 2 ହେଲେ, p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) $4x^2 - 2x + c = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେଲେ, c ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(v) $5x^2 + 2x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ –2 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vi) $x^2 - kx + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 3 ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(vii) $2x^2 + kx + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ମୂଳ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ହେଲେ, k ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

3. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି x ରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $x^2 - x - 12 = 0$ (b) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

(c) $x + \frac{3}{x} = x^2$ (d) $x(x-1)(x+5) = 0$

(ii) $7x^2 - 9x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ କ'ଣ ?

(a) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ୍ । (b) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(c) ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ । (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ ।

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି –6 ଓ 8 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $(x + 6)(x + 8) = 0$ (b) $(x + 6)(x - 8) = 0$

(c) $(x - 6)(x + 8) = 0$ (d) $(x - 6)(x - 8) = 0$

(iv) $3x^2 + 2\sqrt{5}x - 5 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) 3 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (d) $\frac{-5}{3}$

(v) $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha+\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{1}{16}$ (b) 4 (c) $\frac{1}{2}$ (d) –8

(vi) $4x^2 + 3x + 7 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $-\frac{3}{7}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $-\frac{7}{3}$

(vii) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୁଣଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ 4 ଓ $\frac{5}{2}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ?

(a) $2x^2 + 8x + 5 = 0$ (b) $2x^2 - 8x + 5 = 0$

(c) $2x^2 + 8x - 5 = 0$ (d) $2x^2 - 8x - 5 = 0$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 + x - 6 = 0$ (ii) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

(iii) $14x^2 + x - 3 = 0$ (iv) $3x^2 - 32x + 12 = 0$

(v) $x^2 + 2px - 3qx - 6pq = 0$ (vi) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$

(vii) $25x^2 + 30x + 7 = 0$ (viii) $3a^2x^2 + 8abx + 4b^2 = 0$ $(a \neq 0)$

(ix) $x^2 + ax + b = 0$ (x) $x^2 + bx = a^2 - ab$

5. ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର ବୀଜ ବା ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $4x^2 - 11x + 6 = 0$ (ii) $(2x - 1)(x - 2) = 0$

(iii) $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (iv) $a(x^2+1) = x(a^2 + 1)$, $a \neq 0$

(v) $6x^2 + 11x + 3 = 0$ (vi) $2x^2 + 41x - 115 = 0$

(vii) $12x^2 + x - 6 = 0$ (viii) $(6x + 5)(x - 2) = 0$

(ix) $15x^2 - x - 28 = 0$ (x) $(x + 5)(x - 5) = 39$

6. ଯଦି $4x^2 - 13x + k = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 12 ଗୁଣ ହେଲେ k ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

7. $x^2 - 5x + p = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟି ଅପେକ୍ଷା 3 ଅଧିକ ହେଲେ p ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

8. ଯଦି $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

9. ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $(\alpha+1)(\beta+1)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଯଦି $2x^2 - (p+1)x + p - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଓ ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେଲେ p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

11. ଯଦି $5x^2 - 3x - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\alpha^3 + \beta^3 = \frac{117}{125}$

12. ଯଦି $5x^2 + 17x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. $x^2 - 8x + 16p = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ପରିପ୍ରକାଶକୁ p ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

14. ଯଦି $x^2 - 2(5+2m)x + 3(7 + 10m) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହୁଏ, m ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

15. (i) ଯଦି $a = b = c$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମୀକରଣ

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ।

(ii) ଯଦି $a + b + c = 0$ ଏବଂ $a, b, c \in Q$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$(b+c-a)x^2 + (c+a-b)x + (a+b-c) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେବେ ।

16. ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 3 ଓ ମୂଳଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 29 ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର ।

17. ଯଦି $2x^2 - 4x + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 4\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 12$$

18.(i) ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 4 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $4b^2 = 25ac$ ।

(ii) ଯଦି $x^2 - px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 2 ଗୁଣ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$2p^2 = 9q$ ।

19.(i) ଯଦି $41x^2 - 2(5a+4b)x + (a^2+b^2) = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

(ii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସେମାନଙ୍କର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $2q = p(p+1)$।

(iii) ଯଦି $x^2 + px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ ଅନ୍ୟଟିର ବର୍ଗ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $p^3 + q^2 + q = 3pq$

20. ଯଦି $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

2.8 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତରଣ : (Equations reducible to quadratic form)

ଏପରି ଅନେକ ସମୀକରଣ ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁମାନଙ୍କ ରୂପ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ରୂପ ଯଥା $ax^2 + bx + c = 0$ ନୁହେଁ। ମାତ୍ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପକୁ ଆଣି ସମାଧାନ କରିହେବ । ଏପରି କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ - 9 : $4x^4 - 21x^2 + 20 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4 ଓ ଏହା ଦ୍ୱିଘାତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର $x^2 = y$ ଲେଖିଲେ ଏହାର ରୂପ

$$4y^2 - 21y + 20 = 0 \text{ .... (i)}$$

ସମୀକରଣ (i) ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି y ରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରଥମେ ସମୀକରଣ (i) ର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

ସମୀକରଣ (i) ରେ $a = 4, b = -21$ ଓ $c = 20$ ।

ପ୍ରଭେଦକ $(D) = b^2 - 4ac = (-21)^2 - 4 \times 4 \times 20 = 441 - 320 = 121$

$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-21) \pm \sqrt{121}}{2 \times 4} = \frac{21 \pm 11}{8} = \frac{21+11}{8}$ କିମ୍ବା $\frac{21-11}{8} = 4$ କିମ୍ବା $\frac{5}{4}$

$y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

ପୁନଶ୍ଚ $y = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $2, -2, \frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ ବା $(\pm 2, \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : ସମାଧାନ କର : $4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 8(x + \frac{1}{x}) - 29 = 0$

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $\Rightarrow 4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+8(x+\frac{1}{x})-29=0$

$$\Rightarrow 4\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\right\}+8\left(x+\frac{1}{x}\right)-29=0$$

$$\Rightarrow 4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)-45=0 \quad ....(i)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $x+\frac{1}{x}=y$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣର ରୂପାନ୍ତରିତ ରୂପ $4y^2+8y-45=0$ ହେବ ।

ଏଠାରେ, $a=4, b=8$ ଓ $c=-45$ ।

ପ୍ରଭେଦକ (D) $= b^2-4ac=(8)^2-4\times4\times(-45)=64+720=784=(28)^2$ ।

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ଏବଂ ଅସମାନ ହେବ ($\because$ D ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା)।

$$\therefore \quad y=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{784}}{2\times4}=\frac{-8\pm28}{8}=\frac{-8+28}{8} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-8-28}{8}=\frac{5}{2} \text{ କିମ୍ବା } \frac{-9}{2} \text{ ।}$$

ଯଦି $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ ହୁଏ, ତେବେ $2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$

$$=\frac{5+3}{4} \text{ କିମ୍ବା } \frac{5-3}{4}=2 \text{ କିମ୍ବା } \frac{1}{2} \text{ ।}$$

ସେହିପରି ଯଦି $x+\frac{1}{x}=\frac{-9}{2}$ ତେବେ $2x^2+9x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{81-16}}{4}=\frac{-9\pm\sqrt{65}}{4}$ ।

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ଓ ଅସମାନ)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $2, \frac{1}{2}, \frac{-9+\sqrt{65}}{4}, \frac{-9-\sqrt{65}}{4}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ସମାଧାନ କର : $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{13}{6}$

ସମାଧାନ : ମନେକର $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=y$

ତେବେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ହେବ $y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6} \Rightarrow 6y^2-13y+6=0$

$\therefore\ y = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \dfrac{13 \pm 5}{12}$

$\therefore\ y = \dfrac{18}{12}$ କିମ୍ବା $\dfrac{8}{12}$ $\Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$ କିମ୍ବା $y = \dfrac{2}{3}$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow 4x = 9 - 9x \Rightarrow 13x = 9 \Rightarrow x = \dfrac{9}{13}$ ।

ପୁନଶ୍ଚ $y = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow 9x = 4 - 4x \Rightarrow 13x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{13}$ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $\dfrac{9}{13}$ ଓ $\dfrac{4}{13}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $x(x+5)(x+7)(x+12) + 150 = 0$

$\Rightarrow \{x(x+12)\}\{(x+5)(x+7)\} + 150 = 0$ (କାହିଁକି ?)

$\Rightarrow (x^2 + 12x)(x^2 + 12x + 35) + 150 = 0$

$\Rightarrow y(y + 35) + 150 = 0$ (ଏଠାରେ $x^2 + 12x = y$ ହେଲେ)

$\Rightarrow y^2 + 35y + 150 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{-35 \pm \sqrt{(35)^2 - 4 \times 1 \times 150}}{2 \times 1}$ (ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ)

$= \dfrac{-35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2} = \dfrac{-35 \pm \sqrt{625}}{2} = \dfrac{-35 \pm 25}{2} = -5$ କିମ୍ବା -30

$y = -30 \Rightarrow x^2 + 12x = -30 \Rightarrow x^2 + 12x + 30 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 120}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{24}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -6 \pm \sqrt{6}$

ପୁନଶ୍ଚ $y = -5 \Rightarrow x^2 + 12x = -5 \Rightarrow x^2 + 12x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 20}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{124}}{2} = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{31}}{2} = -6 \pm \sqrt{31}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $-6 + \sqrt{6}, -6 - \sqrt{6}, -6 + \sqrt{31}, -6 - \sqrt{31}$

ବା $-6 \pm \sqrt{6}, -6 \pm \sqrt{31}$ । (ଉତ୍ତର)

2.9 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ (Application of Quadratic Equation) :

କେତେକ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ 'ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ'ର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ତର୍ଜମା ଏବଂ ଅନୁଶୀଳନରେ ଆବଶ୍ୟକ ଥିବା ଉତ୍ତରକୁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ରୂପେ ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଏ । ତତ୍ପରେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପରେ ଇପ୍ସିତ ଉତ୍ତର ମିଳିଥାଏ । ବେଳେବେଳେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନରେ ମିଳୁଥିବା ଦୁଇଟି ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ, ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ବେଳେ ଅନ୍ୟଟି ସିଦ୍ଧ କରୁନଥାଏ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ମୂଳଟି ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ହୋଇଥାଏ । ଉକ୍ତ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଘଟୁଥିବା ଘଟଣା ସଂପର୍କିତ କିଛି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ - 13 : ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳର ସମଷ୍ଟି 90 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x^2

$\therefore x^2$ ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ x ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $x^2 + x = 90 \Rightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 9x - 90 = 0$

$\Rightarrow x\ (x + 10) - 9\ (x + 10) = 0$

$\Rightarrow (x + 10)\ (x - 9) = 0 \Rightarrow x = -10$ କିମ୍ବା $x = 9$ ।

ଯେହେତୁ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ, x ର ମାନ -10 ହେବ ନାହିଁ । ତେବେ $x = 9$ ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି $x^2 = 9^2 = 81$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x ।

$\therefore$ x ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ $\sqrt{x}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $x + \sqrt{x} = 90 \Rightarrow \sqrt{x} = 90 - x$

$\Rightarrow x = (90 - x)^2 \Rightarrow x = 8100 - 180x + x^2 \Rightarrow x^2 - 181x + 8100 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 100x - 81x + 8100 = 0 \Rightarrow (x - 100)(x - 81) = 0$

$\Rightarrow x - 100 = 0$ କିମ୍ବା $x - 81 = 0 \Rightarrow x = 100$ କିମ୍ବା $x = 81$

$x = 100$ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ନାହିଁ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

କିନ୍ତୁ $x = 81$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି 81 । (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା : ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅବଲମ୍ବନରେ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ ।)

ଉଦାହରଣ - 14 : ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ x ଓ (15 –x)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{1}{x}+\frac{1}{15-x}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15-x+x}{x(15-x)}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{15}{15x-x^2}=\frac{3}{10}$

$\Rightarrow 150 = 45x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 45x + 150 = 0$ (ପାର୍ଶ୍ୱପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ)

$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)

(ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା, ତେଣୁ ସମୀକରଣର ପରିମେୟ ମୂଳ ସମ୍ଭବ)

$= x^2 - 10x - 5x + 50 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 10$ କିମ୍ବା $x = 5$

ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ହୁଏ ତେବେ ଅନ୍ୟଟି 5 ହେବ । ସେହିପରି ସଂଖ୍ୟାଟି 5 ହେଲେ ଅନ୍ୟଟି 10 ହେବ ।

∴ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ 5 ଓ 10 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 :

ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 11 କି.ମି. । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଯାଇ ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରିଆସିବାକୁ 2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ରୋତର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି x କି.ମି. ।

ପ୍ରତିକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11– x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା

ଅନୁକୂଳ ସ୍ରୋତରେ ନୌକାର ବେଗ = (11+ x) କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ।

∴ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଏବଂ 12 କି.ମି. ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ଯିବା ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{12}{11-x}$ ଘଣ୍ଟା ଏବଂ $\frac{12}{11+x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ଲାଗିବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ : $\frac{12}{11+x}+\frac{12}{11-x}=2\frac{3}{4}$ [2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ = $2\frac{45}{60}$ ଘଣ୍ଟା = $2\frac{3}{4}$ ଘଣ୍ଟା]

$$\Rightarrow \frac{12(11-x)+12(11+x)}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{264}{121-x^2}=\frac{11}{4} \Rightarrow \frac{24}{121-x^2}=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 121 - x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ ।

∴ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 5 କି.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି 2 । ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(ii) ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 20 । ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ y ନେଇ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iii) ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 18 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 72 । ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iv) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ବର୍ଗ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି $S = \frac{n(n+1)}{2}$ । ଯଦି S = 120 ହୁଏ ତେବେ n ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(vi) $\sqrt{x} + x = 6$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(vii) $\sqrt{x+9} + 3 = x$ କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(viii) $x - 2\sqrt{2} - 6 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ତାହାର ବର୍ଗମୂଳ ଅପେକ୍ଷା 12 ଅଧିକ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ତାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{41}{20}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

(iii) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{11}{30}$ ହେଲେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କରି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତକ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{23}{132}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) ଯଦି 51 କୁ ଦୁଇଭାଗ କଲେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 378 ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଏକ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା, ତାହାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର 3 ଗୁଣ । ଏକକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କଟି ଦଶକ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଙ୍କ ଠାରୁ 2 ବୃହତ୍ତର । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ପରିବାରରେ, ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ, ବିଟା ଓ ଗାମାର ବୟସର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ । ଯଦି ବିଟା, ଗାମା ଠାରୁ 1 ବର୍ଷ ବଡ଼ ହୁଏ ଏବଂ ଆଲ୍‌ଫାର ବୟସ 42 ହୁଏ, ତେବେ 5 ବର୍ଷ ପରେ ବିଟାର ବୟସ କେତେ ହେବ ?

5. କୌଣସି ଏକ ଅରଣ୍ୟରେ ବାସ କରୁଥିବା ମର୍କଟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସେମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ ଅଷ୍ଟମାଂଶର ବର୍ଗ କ୍ରୀଡ଼ାରତ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ ବାରଟି ମର୍କଟ ଏକ ଶୃଙ୍ଗ ଉପରେ ବସିଥିଲେ । ଅରଣ୍ୟରେ ସମ୍ଭବତଃ କେତେ ମର୍କଟ ଥିଲେ ?

6. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 30 ବ.ସେ.ମି. । ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ 7 ସେ.ମି. ଅଧିକ ହେଲେ, ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

7. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି. ଓ (3x–1) ସେ.ମି. ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. । ତେବେ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $\frac{1}{2}n(n-3)$ । ଯଦି ବହୁଭୁଜର 54 ଟି କର୍ଣ୍ଣ ରହିବ, ତେବେ ବହୁଭୁଜର ବାହୁର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

9. ଦୁଇଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମଷ୍ଟି 468 ବ.ମି. ଏବଂ ପରିସୀମାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 24 ମି. ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ଚାଲିବାର ବେଗକୁ ଯଦି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 1 କି.ମି. ବୃଦ୍ଧି କରେ ତେବେ 2 କି.ମି. ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 10 ମିନିଟ୍ କମ୍ ସମୟ ନେଇଥାନ୍ତା । ତେବେ ବ୍ୟକ୍ତିର ଚାଲିବାର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ସ୍ଥିର କର ।

11. ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 15 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଅତିକ୍ରମ କରି ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରି ଆସିବାକୁ 4 ଘଣ୍ଟା 30 ମି. ସମୟ ନେଲା । ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 250 ଟଙ୍କାକୁ ସମାନ ଭାଗରେ ବଣ୍ଟାଗଲା । ଯଦି 25 ଜଣ ଛାତ୍ର ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତେ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ 0.50 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ କମ୍ ପାଇଥାନ୍ତେ । ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 8 ମିଟର ଅଧିକ । କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 240 ବର୍ଗ ମିଟର ହେଲେ କ୍ଷେତ୍ରଟିର ପରିସୀମା କେତେ ?

14. ଏକ ରେଳଗାଡ଼ି 300 କି.ମି. ଦୀର୍ଘ ଯାତ୍ରା ପଥରେ ସମାନ ବେଗରେ ଗତି କରୁଥିଲା । ଯଦି ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 5 କି.ମି. ଅଧିକ ହୋଇଥାନ୍ତା, ତେବେ ଗାଡ଼ିଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟର 2 ଘଣ୍ଟା ପୂର୍ବରୁ ଯଥା ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିଥାନ୍ତା । ତେବେ ଗାଡ଼ିର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର ।

15. ଏକ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମିଟର, ପ୍ରସ୍ଥ 16 ମିଟର ଓ ପଡ଼ିଆର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମାନ ଚଉଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ଯଦି ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 230 ବର୍ଗମିଟର ହୁଏ ତେବେ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. କେତେକ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ଏକ ବଣ ଭୋଜିର ଆୟୋଜନ କଲେ । ଖାଦ୍ୟ ଅଟକଳ (Budget) 480 ଟଙ୍କା ଥିଲା । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 8 ଜଣ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଗଲେ ନାହିଁ; ଯାହା ଫଳରେ ଖାଦ୍ୟ ବାବଦ ଖର୍ଚ୍ଚ ଜଣପିଛା 10 ଟଙ୍କା ବଢ଼ିଗଲା । ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ବଣ ଭୋଜିକୁ ଯାଇଥିଲେ ?

17. ସମାଧାନ କର :

(i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$

(ii) $5\sqrt{\frac{3}{x}} + 7\sqrt{\frac{x}{3}} = 22\frac{2}{3}$

(iii) $3x + \frac{5}{16x} - 2 = 0$

(iv) $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^4 - 6\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 + 8 = 0$

(v) $(3x^2 - 8)^2 - 23(3x^2 - 8) + 76 = 0$

(vi) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

(vii) $(x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + 3 = 0$

(viii) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$

(ix) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

(x) $\frac{3}{\sqrt{2x}} - \frac{\sqrt{2x}}{5} = 5\frac{9}{10}$

(xi) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ $(x \neq 0, x \neq -1)$

(xii) $x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63$

(xiii) $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = 6\frac{6}{7}$ $(x \neq -3, 3)$

(xiv) $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$

(xv) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 3 = 0$

(xvi) $\sqrt{2x+9} + x = 13$

(xvii) $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$